Analyse modale haute résolution

K. Ege[1], **X. Boutillon**[1], **B. David**[2]

[1] Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex.
{ege,boutillon}@lms.polytechnique.fr

[2] Télécom ParisTech / TSI - CNRS LTCI
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13
bertrand.david@enst.fr

Résumé — Une nouvelle technique d'analyse modale basée sur l'algorithme de haute résolution ESPRIT [5] et la méthode de détection d'ordre ESTER [1] permet d'étendre le domaine fréquentiel où l'usage du formalisme modal est possible. Deux analyses modales partielles de plaques minces vibrantes sont présentées aux fréquences dites intermédiaires (recouvrement modaux μ compris entre 30% et 100%). Les fréquences et déformées modales estimées par cette méthode sont très proches de résultats théoriques calculés jusqu'à $\mu \approx 70\%$.

Mots clés — Analyse modale, Fréquences moyennes, Recouvrement modal élevé.

1 Introduction

Dans la réponse dynamique d'une structure, trois domaines fréquentiels sont usuellement définis : les basses, moyennes et hautes fréquences. Dans le premier, le comportement vibratoire présente des résonances très marquées. Dans le troisième, la réponse en fréquence tend vers une allure uniforme, correspondant à la situation de *champ diffus*. Entre les deux, les résonances sont de moins en moins prononcées. Le facteur de recouvrement modal μ est défini comme le rapport entre la largeur de bande à -3dB et l'espacement intermodal moyen (l'inverse de la densité modale) et permet de quantifier les limites entres ces trois domaines. Il est admis que le domaine des hautes fréquences est atteint pour $\mu \approx 100\%$. Les techniques d'identification de structures dans ce domaine sont basées sur des approches statistiques (SEA, par exemple). En général, les analyses modales faisant appel à la transformée de Fourier deviennent inefficaces pour des recouvrement modaux de l'ordre de 30% (résolution fréquentielle limitée par la résolution temporelle). Dans le but d'étendre le domaine fréquentiel où l'usage du formalisme modal soit possible une technique basée sur l'algorithme de haute résolution ESPRIT [5] et la méthode de détection de l'ordre ESTER [1] est présentée ici. Deux analyses modales partielles de plaques minces vibrantes sont présentées dans le domaine des fréquences intermédiaires.

2 Technique d'analyse

La technique d'analyse vise à identifier les composantes exponentielles complexes de la réponse impulsionnelle d'une structure supposée linéaire. Les étapes successives en sont :

– obtention de la réponse impulsionnelle à partir d'un essai expérimental ;

– conditionnement de la réponse afin d'en limiter le nombre d'échantillons et le nombre de composantes ; obtention de réponses impulsionnelles partielles ;
– détermination du nombre de composantes de chaque réponse impulsionnelle partielle ;
– détermination des paramètres de chaque composante (fréquence, amortissement, amplitude, phase) ;
– obtention des paramètres modaux (fréquence et amortissement) et des déformées modales.

2.1 Reconstruction de la réponse impulsionnelle

L'obtention expérimentale de la réponse d'une structure peut se faire grâce à l'excitation ponctuelle par marteau d'impact. Comme l'excitation n'est jamais strictement impulsionnelle, chaque réponse doit être au préalable normalisée par l'impulsion qui l'a provoquée. L'analyse modale traditionnelle procède par division des deux spectres. Il est préférable d'éviter ici cette technique car la division par de très faibles valeurs risque d'introduire des composantes fictives qui seraient ensuite prises en compte par l'analyse paramétrique. Ici, nous estimons donc la réponse impulsionnelle $\gamma_{\text{imp}}(t)$ en deux temps [2] :

(a) Estimation du filtre g (à réponse impulsionnelle finie) qu'il faudrait appliquer à la force $f_{\text{mes}}(t)$ exercée par le marteau d'impact sur la structure pour que cette force devienne une impulsion (voir figure 1). Pour des raisons de causalité, cette impulsion est nécessairement décalée dans le temps de p échantillons :

$$f_{\text{mes}} * g = \delta_{\underrightarrow{p}}$$

où $(.)_{\underrightarrow{p}}$ indique le décalage de p échantillons.

(b) Calcul de γ_{imp} à partir de la réponse réelle mesurée γ_{mes} et du filtre g estimé précédemment :

$$\gamma_{\text{imp}} = \{\gamma_{\text{mes}} * g\}_{\underrightarrow{-p}} - v_{\text{imp}}(0^+) \cdot \delta + v(0^+) \cdot g_{\underrightarrow{-p}}$$

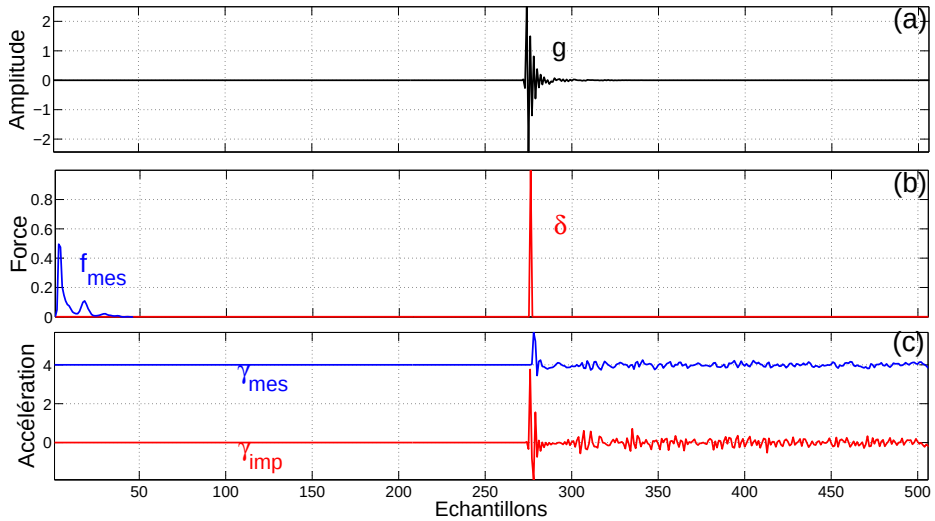


Figure 1 – Reconstruction de la réponse impulsionnelle. (a) Filtre optimisé g (avec $p = 276$).
(b) Force mesurée f_{mes} et impulsion idéale $\delta_{\underrightarrow{p}}$ (décalée de p échantillons).
(c) Réponse mesurée γ_{mes}, et réponse impulsionnelle reconstruite γ_{imp}.

Sur le plan expérimental, cette méthode a l'avantage de la rapidité. En revanche, le rapport signal sur bruit n'est généralement pas aussi bon que celui des instruments dont on dispose. En effet, la répartition dans le temps du signal étant très inégale, la dynamique de la chaîne accélérométrique (en général) est mal exploitée. Une alternative consiste donc à pratiquer une excitation

continue par pot vibrant ou haut-parleur, à l'aide d'un signal large bande. De nombreuses possibilités existent pour le choix du signal d'excitation. Un choix ayant donné de bons résultats, proposé par Farina *et al.* [3], consiste à exciter la structure à l'aide d'un sinus glissant logarithmique. La réponse impulsionnelle peut être alors obtenue par déconvolution.

2.2 Préconditionnement et détection de l'ordre

Dans le but de diminuer le temps de calcul et d'augmenter les performances de l'analyse, la réponse impulsionnelle γ_{imp} ne doit pas contenir trop d'échantillons. En effet, la complexité de l'algorithme ESPRIT présenté plus loin est en $o(N^3)$, où N est le nombre d'échantillons du signal analysés, appelé encore "horizon d'observation". Il faut également éviter de devoir analyser un trop grand nombre de composantes complexes simultanément (typiquement $K < 20$). Un filtrage par bandes de fréquences permet de respecter ce dernier critère, la largeur de la bande étant choisie grâce à une estimation grossière préalable de la densité modale. Le résultat est ensuite multiplié par une exponentielle complexe non amortie (décalage en fréquence) et décimé, ce qui permet de satisfaire le premier critère.

Le nombre exact de composantes complexes K de chaque réponse impulsionnelle partielle (par bande de fréquence) est alors estimé grâce à la méthode ESTER [1] : minimisation de l'erreur E sur la propriété d'invariance rotationnelle d'une base de l'espace signal, en fonction de l'ordre du modèle p. La figure 2(a) donne un exemple de cette procédure appliquée à un signal composé de huit exponentielles complexes. En pratique, K est la plus grande valeur de p pour laquelle $J(p) > J_t$, où $J(p) = \frac{1}{||E(p)||^2}$ est la fonction d'erreur inverse à l'ordre p et J_t est un seuil choisi de manière arbitraire au dessus du bruit de mesure.

2.3 Estimation des paramètres modaux

Une fois le prétraitement effectué et le nombre de composantes modales identifié (ordre du modèle), on procède à l'analyse ESPRIT [5]. En principe, l'algorithme donne une estimation pratiquement optimale lorsqu'il porte sur un signal composé de K exponentielles complexes et d'un bruit blanc bb (1). Dans la pratique, le bruit n'est pas parfaitement blanc. Nous avons mis en œuvre des traitements permettant de "blanchir" le bruit mais le gain sur l'estimation s'est avéré réduit dans le cas d'analyses par bandes de fréquences étroites. L'analyse s'avère donc robuste lorsque le critère "bruit blanc" n'est pas bien respecté.

$$s(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k e^{i\varphi_k} e^{-\alpha_k t + 2i\pi f_k t} + bb(t) \tag{1}$$

La méthode ESPRIT fait partie de la famille des méthodes "sous-espaces" qui projettent le signal sur un sous-espace que nous appelons "signal modal" et sur un sous-espace "bruit". La dimension K du sous-espace "signal modal" doit être déterminée *a priori* : c'est le rôle de la détermination d'ordre présentée plus haut. Le choix de la dimension n du sous-espace "signal plus bruit" est en principe optimal pour $n = N/3$, d'après [1]. Dans la pratique, l'erreur d'estimation augmente rapidement en dehors de l'intervalle $[N/3\ ,\ 2N/3]$ mais ne varie que peu à l'intérieur de l'intervalle. Un bon choix empirique consiste donc à prendre $n = N/2$ comme dimension du sous-espace "signal plus bruit" et donc $N/2 - K$ comme dimension du sous-espace "bruit".

La méthode ESPRIT estime les fréquences f_k et amortissements α_k de chaque composante en chaque point. Connaissant ces paramètres, il est alors possible d'estimer les amplitudes a_k et phases φ_k par une recherche en moindres carrés sur $s(t)$. La fréquence modale et l'amortissement modal sont estimés par moyennage des déterminations en chaque point, pondérées par les amplitudes estimées. Enfin, l'incertitude sur la fréquence par exemple est estimée par $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N_b}\Sigma_i (f_i - \bar{f})^2}}{\bar{f}}$

où $\bar{f} = \dfrac{1}{N_b}\sum_i f_i$ et N_b est le nombre de points où l'estimation est réalisée.

3 Applications - Analyse modale de plaques minces vibrantes

Deux plaques en aluminium – A ($590 \times 637 \times 5.2$ mm^3) et B ($1000 \times 1619 \times 5$ mm^3) – suspendues par une série d'élastiques de manière à assurer des conditions aux limites libre-libre, ont été analysées. L'excitation est donnée par impact sur une série de points et le mouvement mesuré par un accéléromètre fixe. La figure 2(a) présente une analyse ESTER typique, menée dans le domaine des fréquences intermédiaires de la plaque A ($f \in$[520-660] Hz, $\mu \approx 45\%$). Huit exponentielles complexes soit quatre modes réels sont clairement detectés alors que la transformée de Fourier du même signal (figure 2(b)) ne permet pas de les séparer ni d'estimer leurs paramètres modaux de manière efficace. Pour chaque point de mesure, fréquences, amortissements, amplitudes et phases

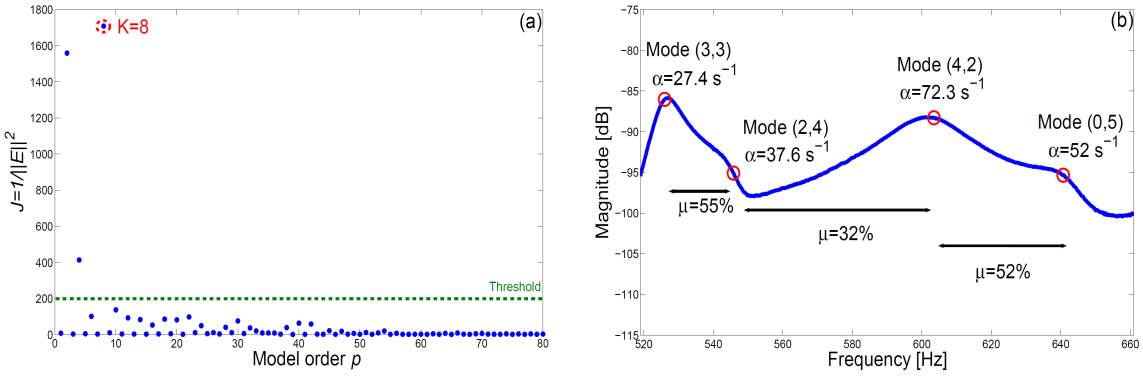


Figure 2 – Plaque A, $f \in$[520-660] Hz, $\mu \approx 45\%$. (a) Critère ESTER : huit composantes complexes estimées (quatre composantes réelles). (b) Spectre de Fourier. ○ : les quatre modes estimés par ESPRIT

sont calculés selon la procédure exposée plus haut. Les fréquences et déformées modales théoriques ont été par ailleurs calculées à l'aide d'une méthode de Rayleigh dite *améliorée* [4].

La figure 3 et le tableau 1 synthétisent les résultats pour la plaque A pour la bande de fréquence $[520-660]$ Hz. Les quatre modes sont bien séparés, et les déformées modales très proches des déformées théoriques.

	mode (3,3)	mode (2,4)	mode (4,2)	mode (0,5)
f_{Ray} (Hz)	523.7	542.7	587.2	645.7
f (Hz)	526	545.8	603.5	640.7
α (s^{-1})	27.4	37.6	72.3	52

Tableau 1 – Estimations des paramètres modaux de la plaque A pour la bande fréquentielle $[520-660]$ Hz. Ligne du haut : méthode de Rayleigh dite "améliorée" [4]. Ligne du bas : résultats expérimentaux.

Pour la plaque B, deux analyses modales partielles – autour de 1700 Hz ($\mu \approx 45\%$) et de 2100 Hz ($\mu \approx 70\%$) – ont étés effectués au voisinage de la zone fréquentielle dite *de coïncidence acoustique*. Nous proposons d'identifier les modes mis en évidence comme les modes $(10,11)$, $(9,13)$ et $(12,4)$ pour la première bande de fréquence et $(3,21)$, $(5,20)$, $(13,6)$, $(9,16)$, $(12,10)$ pour la seconde. Ces modes sont respectivement d'ordre 199 à 201 et 243 à 247. Leurs déformées modales théoriques [4] sont présentées sur les figures 4 et 5. Enfin, le caractère haute résolution de l'analyse est illustré par les faibles incertitudes sur la fréquence modale et sur l'amortissement modal (voir, par exemple, figure 6 pour le mode (12,4) de la plaque B).

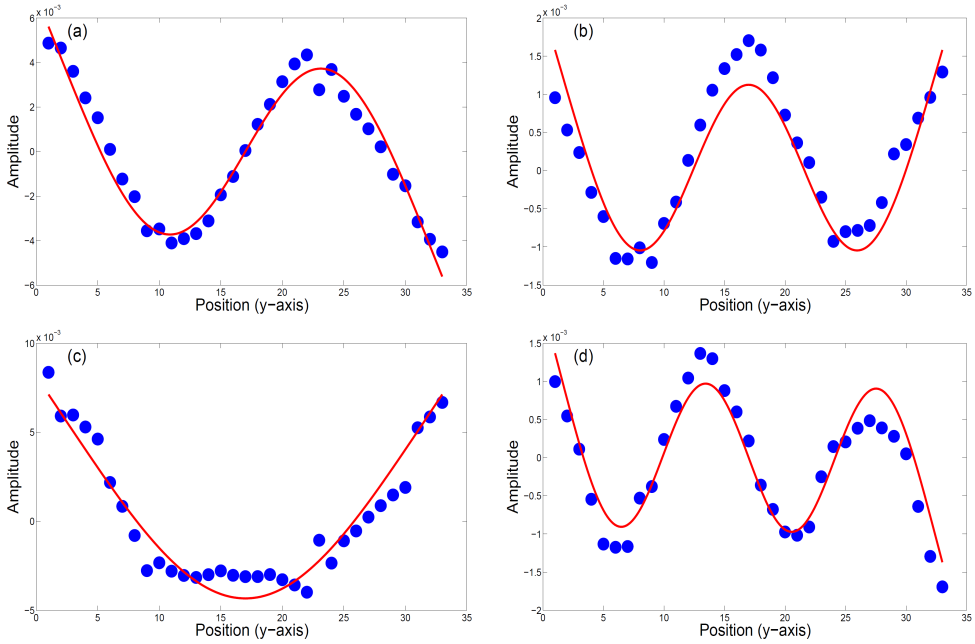


Figure 3 – Analyse modale partielle de la plaque A le long d'un côté. • : modes *mesurés*. Traits continus : modes *théoriques* du système conservatif. (a) mode (3,3) ; (b) mode (2,4) ; (c) mode (4,2) ; (d) mode (0,5).

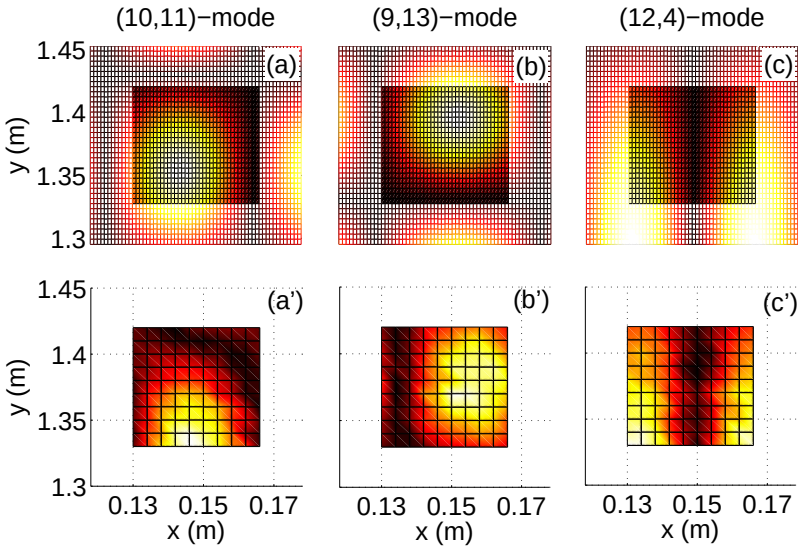


Figure 4 – Analyse modale partielle de la plaque B. $f \in$[1685-1697] Hz, $\mu \approx 45\%$. (a),(b),(c) Déformées modales calculées. (a'), (b'), (c') Déformées modales mesurées.

4 Conclusion

La méthode d'analyse modale présentée a permis de résoudre des cas où la transformée de Fourier s'avère difficile à utiliser. Des analyses modales partielles de plaque vibrantes dans le domaine des fréquences intermédiaire (recouvrement modaux jusqu'à 70%) ont étés efficacement menées et concordent bien avec la théorie. Les performances de la méthode sont limitées par le rapport signal sur bruit. Enfin, la méthode repose sur un modèle de signal qui n'est valable que dans le cas linéaire. La séparation des réponses linéaire et non-linéaire ou le suivi des sinusoïdes sont deux solutions envisageables dans ce cas.

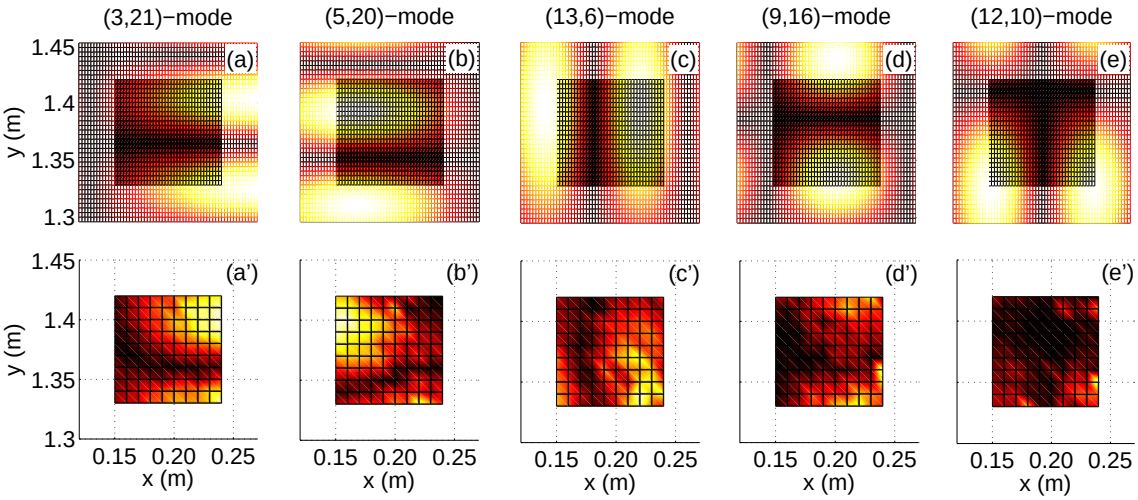


Figure 5 – Analyse modale partielle de la plaque B. $f \in$[2065-2110] Hz, $\mu \approx 70\%$. (a),(b),(c),(d),(e) Déformées modales calculées. (a'),(b'),(c'),(d'),(e') Déformées modales mesurées.

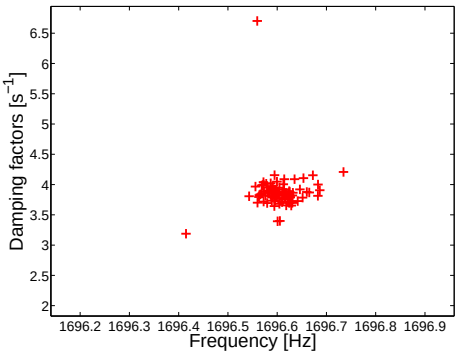


Figure 6 – Incertitudes sur les fréquences et amortissement modaux pour le mode (12,4) de la plaque B (100 estimations).

Références

[1] R. Badeau, B. David, G. Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(2) :450-458, 2006.

[2] K. Ege, X. Boutillon, B. David, J. Lozada. Estimation modale haute résolution *18ème Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France, 2007.

[3] A. Farina. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique *108th Convention of the Audio Engineering Society*, Paris, France, 2000.

[4] C.S. Kim, S.M. Dickinson Improved approximate expressions for the natural frequencies of isotropic and orthotropic rectangular-plates *Journal of Sound and Vibration*, 103(1) :142-149, 1985.

[5] R. Roy and T. Kailath. Esprit - estimation of signal parameters via rotational invariance techniques *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 37(7) : 984-985, 1989.