



HAL
open science

Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal

Michel Fliess, Philippe Martin, Nicolas Petit, Pierre Rouchon

► **To cite this version:**

Michel Fliess, Philippe Martin, Nicolas Petit, Pierre Rouchon. Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal. *Traitement du Signal*, 1998, 15 (6), pp.619-625. hal-01591949

HAL Id: hal-01591949

<https://hal-polytechnique.archives-ouvertes.fr/hal-01591949>

Submitted on 22 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal

Controlling the equation of telegraphy and active restoration of some signals

par Michel FLIESS*, Philippe MARTIN**, Nicolas PETIT**, Pierre ROUCHON **

* Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, École Normale Supérieure de Cachan
61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan, France.
Courriel : fliess@cmla.ens-cachan.fr

** Centre Automatique et Systèmes, École Nationale Supérieure des Mines de Paris
60, boulevard Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France.
Courriel : {martin,petit,rouchon}@cas.ensmp.fr

résumé et mots clés

On corrige la distorsion d'un signal le long d'une ligne électrique, modélisée par l'équation des télégraphistes. Cette commande, corroborée par des simulations, prolonge des travaux antérieurs sur les équations des cordes vibrantes, de la chaleur et des verges vibrantes. Elle fait appel au calcul opérationnel et à l'interprétation de la commandabilité obtenue grâce à la théorie algébrique des modules. On généralise, ainsi, à la dimension infinie la planification de trajectoires des systèmes non linéaires *plats*.

Équation des télégraphistes, commande, signal, distorsion, platitude, modules, calcul opérationnel, convolution, fonctions de Bessel.

abstract and key words

We are compensating the distortion of an input signal along an electric line, which is modelled by the telegraph equation. This control synthesis, which is corroborated by several simulations, continues some previous works on the wave, the heat and the Euler-Bernoulli equations. It also employs operational calculus and the algebraic interpretation of controllability obtained thanks to module theory. It extends to infinite dimensional systems the motion planning of *flat* nonlinear systems.

Telegraph equation, control, signal, distortion, flatness, modules, operational calculus, convolution, Bessel functions.

*Au professeur Bernard Picinbono, en hommage respectueux
pour son soixante-cinquième anniversaire*

1. introduction

En traitement du signal, on cherche souvent à reconstruire un signal d'entrée $u(t)$, dégradé, en analysant le signal de sortie $y(t)$. On aborde ce sujet par la commande d'un système à paramètres répartis, thème classique s'il en est (cf. [1, 3, 6, 19]). En effet, dans certaines situations privilégiées, comme ici, avec une ligne électrique, il convient de tenir compte des éventualités suivantes :

- on connaît les lois physiques précises de la transmission,
- on peut, comme en automatique, *précompenser* l'entrée.

Il est, alors, loisible de modifier de façon active $u(t)$ pour corriger la distorsion de $y(t)$ et, ainsi, restaurer le signal d'entrée. On utilise la convolution

$$u = \mathcal{F} \star y \quad (1)$$

Le filtre acausal \mathcal{F} , obtenu en supposant la ligne régie par l'équation aux dérivées partielles, dite des *télégraphistes* (cf. [29]), s'exprime avec un retard, une avance et des fonctions de

Bessel. Il est à support compact, propriété autorisant des calculs aisés et réalistes. Une telle planification de trajectoires, selon une terminologie courante en robotique, s'apparente à la commande des systèmes non linéaires, dits (*différentiellement*) plats [9,10] (voir, par exemple, [18, 30, 32] pour une présentation simplifiée). Elle prolonge (voir [12, 20]) des travaux récents sur diverses classes de systèmes linéaires de dimension infinie, comme les systèmes à retards (voir [24] et [25]), les équations des cordes vibrantes [25, 26], de la chaleur [14, 15] et des verges vibrantes, équation dite aussi d'Euler-Bernoulli [13]¹. La détermination de la sortie plate y emploie, également, le calcul opérationnel, ou symbolique, autrefois usuel en mathématiques appliquées (cf. [4, 27]), et l'interprétation de la notion de commandabilité obtenue dans le cadre de la théorie algébrique des modules, d'abord en dimension finie [7], puis pour les systèmes à retards (voir [24] et [11]).

Après une courte description du modèle physique, nous exhibons, pour simplifier la lecture, la solution opérationnelle sous une forme qui prouve que la tension de sortie $y(t)$ n'est autre que la sortie plate. Les simulations, qui exploitent (1), donnent, sans aucune discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, l'entrée correspondant à la sortie désirée; elles sont comparées aux déformations subies sans cette précompensation. D'autres simulations valident la robustesse. La dernière partie est consacrée à un survol des justifications mathématiques. A côté des modules déjà évoqués, nous présentons le calcul opérationnel de Heaviside à travers le formalisme algébrique, dû à Mikusiński [22, 23] (voir, aussi, [35]), qui évite bien des difficultés liées à la transformation de Laplace. Enfin, est esquissée la détermination de (1), qui utilise [22, 35].

2. équation des télégraphistes

2.1. le modèle physique

On s'intéresse à la propagation d'un signal dans une ligne électrique, de longueur ℓ . Soient R la résistance, L l'inductance par unité de longueur, C la capacité et G la perditance, par unité de longueur.

Courant et tension vérifient (cf. [29]) :

$$\begin{aligned} L \frac{\partial i}{\partial t} &= -Ri - \frac{\partial v}{\partial x} \\ C \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial i}{\partial x} - Ge. \end{aligned}$$

1. On trouvera en [16] un panorama complet pour des équations de type parabolique et celle des verges vibrantes.

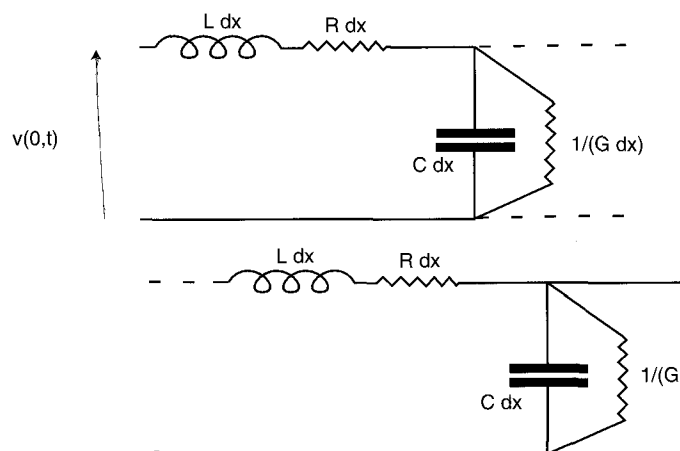


Figure 1. - Modèle de ligne électrique.

où $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$. Une élimination immédiate fournit l'équation des télégraphistes (cf. [29]) :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = (R + L \frac{\partial}{\partial t})(G + C \frac{\partial}{\partial t})v(x, t) \quad (2)$$

Les conditions aux bords sont données par la tension d'entrée $u(t)$ et la loi d'Ohm en sortie :

$$\begin{aligned} v(0, t) &= u(t) \\ v(\ell, t) &= Zi(\ell, t). \end{aligned}$$

L'entrée et la sortie sont donc, respectivement, $u(t) = v(0, t)$ et $y(t) = v(\ell, t)$.

2.2. calcul opérationnel

2.2.1. solution opérationnelle

Avec des conditions initiales nulles, c'est-à-dire $v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0$, le calcul opérationnel transforme (2) en l'équation différentielle ordinaire en la variable indépendante x

$$\hat{v}''(x, s) = \varpi(s)\hat{v}(x, s) \quad (3)$$

où $\varpi(s) = (R + Ls)(G + Cs)$ (s est un paramètre, désignant la dérivation par rapport au temps). Les conditions aux bords deviennent

$$\hat{v}(\ell)(0, s) = \hat{u}, \quad (R + Ls)\hat{v}(\ell, s) = Zi'(\ell, s). \quad (4)$$

Les quantités \hat{u} et \hat{v} sont les *analogues* opérationnels² de u et v . La solution générale de (3) étant

$$\hat{v}(x) = A \operatorname{ch}((\ell - x)\sqrt{\varpi}) + B \operatorname{sh}((\ell - x)\sqrt{\varpi})$$

2. Dans la justification traditionnelle du calcul opérationnel (cf. [4, 27]), \hat{u} et \hat{v} sont les transformées de Laplace de u et v , c'est-à-dire $\hat{u} = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t) dt$ et $\hat{v} = \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x, t) dt$. L'autre approche, due à [22, 23] (voir, aussi, [35]), sera évoquée plus bas.

où A et B sont indépendants de x , (4) permet d'écrire

$$\hat{v}(x) = \left(\text{ch}((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}) + \frac{R + Ls \text{sh}((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)})}{Z\sqrt{\varpi(s)}} \right) \hat{y} \quad (5)$$

où $\hat{y} = \hat{v}(\ell)$. La formule (5) nous conduit à choisir \hat{y} comme sortie plate. En particulier, il vient

$$\hat{u} = \left(\text{ch}(\ell\sqrt{\varpi(s)}) + \frac{R + Ls \text{sh}(\ell\sqrt{\varpi(s)})}{Z\sqrt{\varpi(s)}} \right) \hat{y} \quad (6)$$

2.2.2. solution temporelle

Sans réelle perte de généralité et pour simplifier la présentation des calculs, posons $G = 0$. Cette situation est bien souvent considérée en pratique. Posons $\lambda = \ell\sqrt{LC}$, $\alpha = \frac{R}{2L}$. Alors, $\varpi(s) = RCs + LCs^2$ et (6) devient

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{1}{2}e^{-\alpha\lambda}(1 - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}})y(t - \lambda) \\ & + \frac{1}{2}e^{\alpha\lambda}(1 + \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}})y(t + \lambda) \\ & + \int_{-\lambda}^{+\lambda} \left(\frac{R}{4Z\sqrt{LC}}e^{-\alpha\tau} J_0(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) \right. \\ & + \frac{e^{-\alpha\tau}i\alpha}{2\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} \\ & \left. (\lambda - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\tau) J_1(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) \right) y(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

où J_0 et J_1 sont, avec les notations habituelles, des fonctions de Bessel. La valeur de u à l'instant t dépend de celles de $y(\tau)$ pour $\tau \in [t - \lambda, t + \lambda]$.

3. simulations

Les simulations qui suivent ont été réalisées pour des valeurs de $R = 2,16 \cdot 10^{-3}$, $L = 18,42 \cdot 10^{-7}$, $C = 1,8 \cdot 10^{-11}$, $Z = 100$, $l = 10^6$, en unités S.I. Le modèle discret comporte $N = 80$ cellules (voir figure 1.1). Les créneaux d'entrées sont envoyés à des fréquences de 50Hz et 300Hz.

On envoie des créneaux en entrée dont l'amplitude tient compte du gain statique de la ligne $(1 + \frac{Rl}{Z})$.

3.1. fréquence 50 hz

A cette fréquence, on constate une certaine déformation du signal d'entrée.

La méthode de précompensation, fournit bien les créneaux désirés. Avec la même amplitude du signal d'entrée, on obtient des signaux de sortie plus faibles (facteur 2.5), mais bien plus lisibles.

3.2. fréquence 300 hz

Les créneaux d'entrée sont, alors, déformés au point d'être méconnaissables.

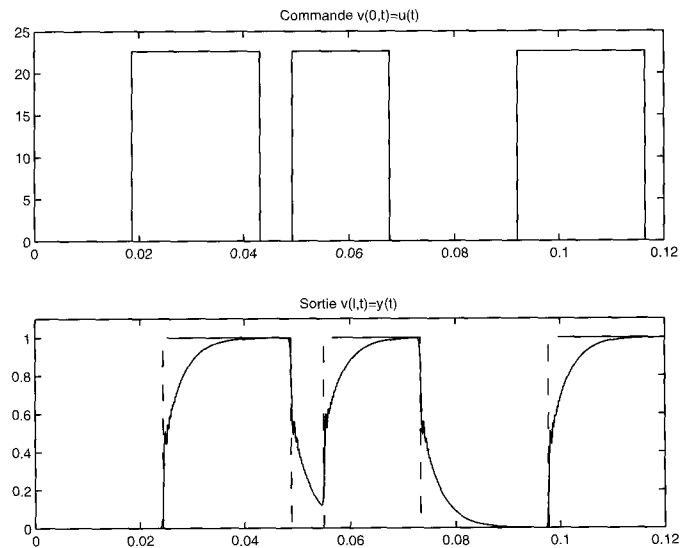


Figure 2. - Créneaux en entrée. Fréquence 50 Hz

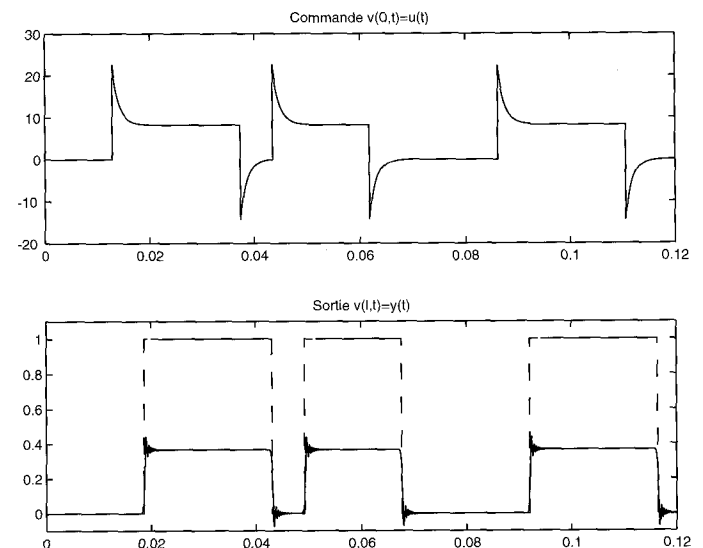


Figure 3. - Précompensation. Fréquence 50 Hz.

En utilisant un signal d'entrée de la même amplitude, la méthode de précompensation, fournit encore une fois des créneaux nets facilement détectables mais d'amplitude plus faible.

3.3. robustesse

En général il est assez facile de bien estimer R . En revanche les paramètres L et C sont parfois mal connus. Les simulations qui suivent indiquent une robustesse satisfaisante³ de notre méthode par rapport à des erreurs de modèle.

3.4. conclusion expérimentale

En dépit d'une certaine atténuation, on obtient en sortie des signaux nets et bien détectables. Cela devrait permettre d'augmenter sensiblement le débit de transmission de la ligne.

4. justifications théoriques

4.1. calcul opérationnel de Mikusiński

L'ensemble \mathcal{C} des fonctions continues, définies sur $[0, +\infty[$, et à valeurs complexes, muni de l'addition $+$,

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

et du produit de convolution $f \star g$,

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

est un anneau commutatif. D'après un théorème fameux dû à Titchmarsh (voir, par exemple, [22, 23, 35]), \mathcal{C} est intègre, c'est-à-dire sans diviseur de zéro :

$$f \star g = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{ou} \quad g = 0$$

Le corps de fractions \mathcal{M} de \mathcal{C} est appelé *corps de Mikusiński*. Tout élément de \mathcal{M} est appelé *opérateur*.

Notations

1) Une fonction $f(t)$, considérée comme opérateur de \mathcal{M} est notée $\{f(t)\}$. Ainsi, $\{1\} \in \mathcal{C}$ se confond avec la fonction de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

3. La démonstration mathématique de cette robustesse reste à faire.

2) Le produit (de convolution) de deux opérateurs $a, b \in \mathcal{M}$ est noté ab .

Exemples

1) L'élément neutre 1 de \mathcal{M} est l'analogue de la distribution de Dirac dans la théorie des distributions de L. Schwartz.

2) L'inverse dans \mathcal{M} de la fonction de Heaviside $\{1\}$ est l'opérateur de dérivation s qui obéit aux règles usuelles : si $f \in \mathcal{C}$ est C^1 , alors $sf = \{f'\} - \{f(0)\}$. Les opérateurs du sous-corps $\mathcal{C}(s)$ de \mathcal{M} ont la signification habituelle. La dérivation fractionnaire \sqrt{s} est l'inverse de $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right\}$.

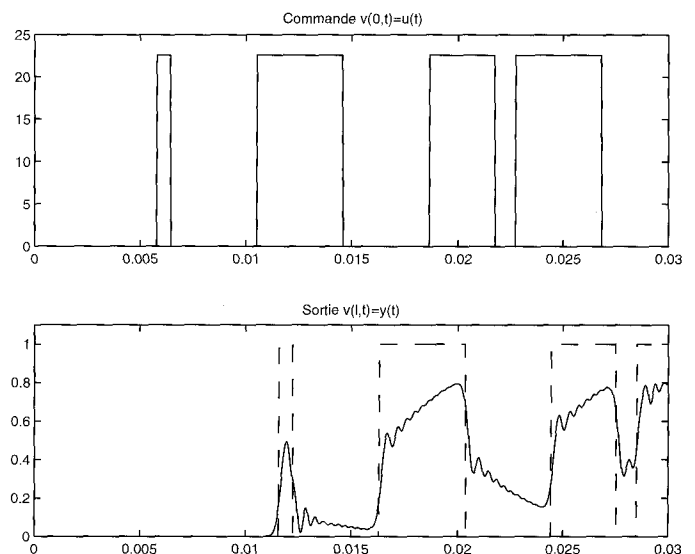


Figure 4. – Créneaux en entrée. Fréquence 300 Hz.

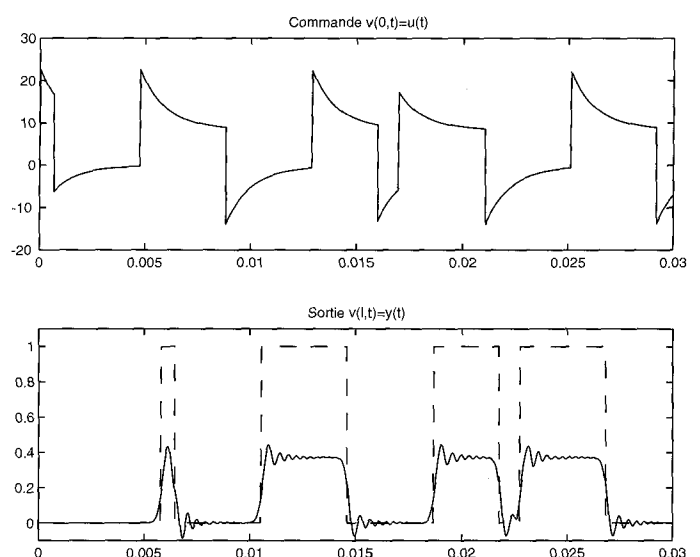


Figure 5. – Précompensation. Fréquence 300 Hz.

3) L'opérateur $e^{-\lambda s}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, est l'opérateur de retard, d'amplitude λ . Son inverse $e^{\lambda s}$ est l'opérateur d'avance, d'amplitude λ .

Une fonction opérationnelle [22, 23] est une application $I \rightarrow \mathcal{M}$, où I est un intervalle de \mathbf{R} . On peut en définir la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité.

Le calcul opérationnel associé à certains types d'équations aux dérivées partielles linéaires des équations différentielles ordinaires linéaires, dites opérationnelles. A l'équation des télégraphistes (2), avec conditions initiales nulles, correspond l'équation opérationnelle (3), où s doit être considéré comme un paramètre constant. En (4), (5) et (6), \hat{u} , qui correspond à la commande u , est une quantité transcendante par rapport au corps \mathcal{M} .

4.2. modules et sorties plates

Récrivons (5) sous la forme

$$Q\hat{v} = P(x)\hat{u} \tag{8}$$

où

$$P(x) = \operatorname{ch}(\ell - x)\sqrt{\varpi(s)} + \frac{R + Ls \operatorname{sh}(\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}}{Z\sqrt{\varpi(s)}}$$

$$Q = \operatorname{chl}\sqrt{\varpi(s)} + \frac{R + Ls \operatorname{sh}\ell\sqrt{\varpi(s)}}{Z\sqrt{\varpi(s)}}$$

sont respectivement une fonction opérationnelle et un opérateur. Nous allons examiner les propriétés du $\mathbf{C}[P(x), Q]$ -module M engendré par \hat{u} et \hat{v} , vérifiant (8).

On peut montrer [16] que $\mathbf{C}[P(x), Q]$ est isomorphe à un anneau de polynômes en deux indéterminées, à coefficients complexes. La matrice $(Q, -P(x))$, qui est de rang générique 1, est une matrice de présentation de M , c'est-à-dire

$$(Q, -P(x)) \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \end{pmatrix} = 0$$

Il en découle, en raison d'un théorème dû à [36] et déjà utilisé en [11, 24], que M est sans torsion car les mineurs de cette matrice sont premiers entre eux. De plus, en vertu de la résolution de la conjecture de Serre [33], due à Quillen [28] et Suslin [34] et déjà utilisée en [11, 24], M n'est pas libre car le rang de la matrice de présentation chute si l'on égale à zéro les indéterminées représentées par $P(x)$ et Q . Le module localisé

$$M_{\text{loc}} = \mathbf{C}[P(x), Q, (P(x)Q)^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}[P, Q]} M$$

où l'on s'autorise à multiplier par l'inverse de $P(x)Q$, est libre de base $1 \otimes \hat{u}$ ou $1 \otimes \hat{v}$. C'est la π -liberté de [11, 24], où $\pi = PQ$. Résumons ce qui précède par le

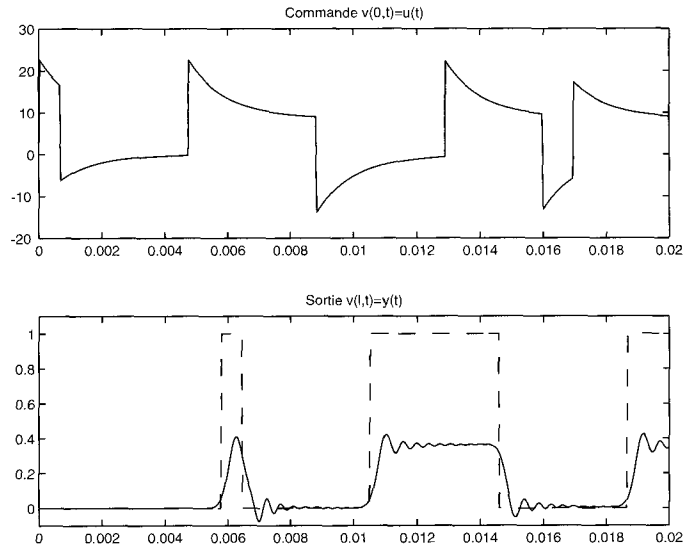


Figure 6. – Fréquence 300 Hz. Sous-estimation de C de 5%.

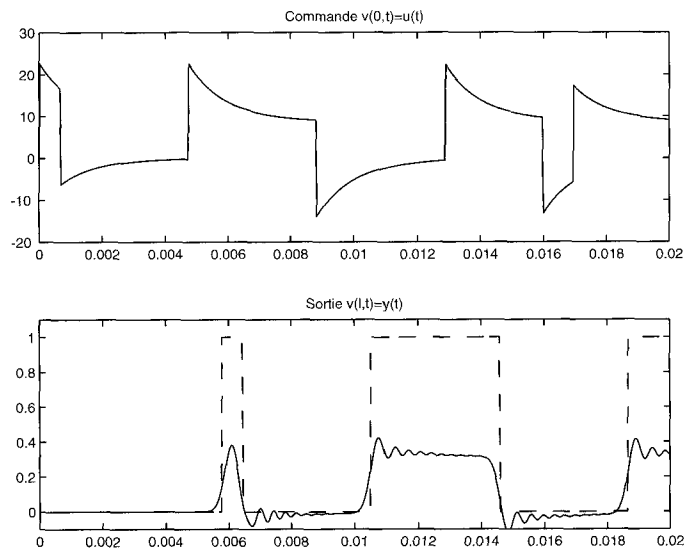


Figure 7. – Fréquence 300 Hz. Sur-estimation de L de 5%.

Théorème

Le $\mathbf{C}[P, Q]$ -module M est sans torsion, mais non libre. Le module localisé M_{loc} est libre.

Comme $P(\ell) = 1$, une base intéressante de M_{loc} est $\hat{y} = \hat{v}(0)$, qui est appelé sortie plate, ou basique.

4.3. fonctions de Bessel

Le passage de (6) à (7) est une conséquence des calculs et formules dans [22], p. 207-208 (voir, aussi, [35], p. 136-138)⁴.

4. Il est instructif de comparer les démonstrations basées sur le calcul opérationnelle de Mikusiński avec celles à partir de la transformation inverse de Laplace (voir, par exemple, [5, 27]).

Remarque.

Il serait possible de démontrer directement que \mathcal{F} est à support compact grâce au théorème bien connu de Paley-Wiener (cf. [31]), dont on trouvera une version propre à la transformation de Laplace en [5]. Par contre, le support de l'opérateur \mathcal{F}^{-1} , qui fait passer de u à y , n'est pas compact.

5. Conclusion

Les questions de transmission, examinées ici, sont susceptibles de suites variées (voir, par exemple, [2]). Mentionnons aussi la récente étude [8, 17] d'un tuyau sonore modélisé, d'après [21], par une équation des cordes vibrantes avec amortissement fractionnaire.

6. remerciements

Travail soutenu par l'European Commission's Training and Mobility of Researchers (TMR), contrat # ERBFMRX-CT970137.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Bensoussan, G. Da Prato, M.C. Ddelfour, S.K. Mitter, «Representation and Control of Infinite Dimensional Systems», Vol. 1 & 2, Birkhäuser, Boston, 1992 & 1993.
- [2] S. Charruau, «Électromagnétisme et interconnexions», Diderot, Paris, 1997.
- [3] R.F. Curtain, H.J. Zwart, «An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory», Springer, New York, 1995.
- [4] G. Doetsch, «Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation», Springer, Berlin, 1937.
- [5] G. Doetsch, «Handbuch der Laplace-Transformation», 3. Bd., Birkhäuser, Bâle, 1956.
- [6] A. El Jai, A.J. Pritchard, «Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués», Masson, Paris, 1986.
- [7] M. Fliess, «Some basic structural properties of generalized linear systems», *Systems Control Lett.*, Vol. 15, 1990, p. 391-396.
- [8] M. Fliess, R. Hotzel, «Sur les systèmes linéaires à dérivation non entière», *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 324, Série II b, 1997, p. 99-105.
- [9] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon, «Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and applications», *Internat. J. Control*, Vol. 61, 1995, p. 1327-1361.
- [10] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon, «A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems», *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 44, 1999.
- [11] M. Fliess, H. Mounier, «Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach», *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 3, 1998, p. 301-314. URL : [//www.emath.fr/Maths/Cocv/cocv.html](http://www.emath.fr/Maths/Cocv/cocv.html)
- [12] M. Fliess, H. Mounier, «Tracking control and π -freeness of infinite dimensional linear systems», in *Interfaces of Systems and Control with Signals, Coding, Computer Vision, and Discrete-Event Systems* (MTNS-98 invited lecture), Birkhäuser, Boston, 1999.
- [13] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, «Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible», *ESAIM Proc.*, Vol. 2, 1997, p. 183-193. URL : [//www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.2/fliess/fliess.html](http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.2/fliess/fliess.html)
- [14] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, «Controlling the transient of a chemical reactor : a distributed parameter approach», *Proc. CESA-98*, Hammamet, Tunisie, 1998.
- [15] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, «A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor : a multi-variable case», *Proc. 37th Conf. Decision Control*, Tampa, FL, 1998, p. 439-442.
- [16] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, «Gevrey functions, Mikusiński's operational calculus and motion planning for some elementary distributed parameter systems», à paraître.
- [17] R. Hotzel, «Contributions à la théorie structurelle et à la commande des systèmes linéaires fractionnaires», *Thèse*, Université Paris-Sud, Orsay, 1998.
- [18] J. Lévine, J. Lottin, J.C. Ponsart, «A nonlinear approach to the control of magnetic bearings», *IEEE Trans. Control Syst. Techn.*, Vol. 4, 1996, p. 524-544.
- [19] J.L. Lions, «Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles», Dunod, Paris, 1968.
- [20] Ph. Martin, R.M. Murray, P. Rouchon, «Flat systems», in *Plenary Lectures and Mini-Courses, ECC-97*, G. Bastin and M. Gevers Eds, Bruxelles, 1997, p. 211-264.
- [21] D. Matignon, «Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire», *Thèse*, Université Paris-Sud, Orsay, 1994.
- [22] J. Mikusiński, «Operational Calculus», vol. 1, PWN, Varsovie, & Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [23] J. Mikusiński, T.K. Boehme, «Operational Calculus», vol. 2, PWN, Varsovie, & Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [24] H. Mounier, «Propriétés structurelles des systèmes à retards : aspects théoriques et pratiques», *Thèse*, Université Paris-Sud, Orsay, 1995.
- [25] H. Mounier, P. Rouchon, J. Rudolph, «Some examples of linear systems with delays», *J. Europ. Syst. Autom.*, Vol. 31, 1997, p. 911-925.
- [26] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess, P. Rouchon, «Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as a delay system», *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 3, 1998, p. 315-321. URL : [//www.emath.fr/Maths/Cocv/cocv.html](http://www.emath.fr/Maths/Cocv/cocv.html)
- [27] M. Parodi, «Introduction à l'étude de l'analyse symbolique», Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [28] D. Quillen, «Projective modules over polynomial rings», *Invent. Math.*, Vol. 36, 1976, p. 167-171.
- [29] Y. Rocard, «Dynamique générale des vibrations», 4^e éd., Masson, Paris, 1971.
- [30] R. Rothfuss, J. Rudolph, M. Zeitz, «Flachheit : ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme», *Automatisierungstechnik*, Vol. 45, 1997, p. 517-525.
- [31] W. Rudin, «Real and Complex Analysis», 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987 (traduction française : «Analyse réelle et complexe», Dunod, Paris, 1998).
- [32] J. Rudolph, E. Delaleau, «Some examples and remarks on quasi-static feedback of generalized states», *Automatica*, Vol. 34, 1998, p. 993-999.

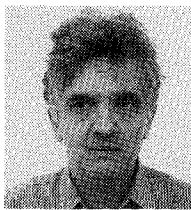
- [33] J.P. Serre, «Faisceaux algébriques cohérents», *Ann. of Math.*, Vol. 61, 1955, p. 197-218.
- [34] A.A. Suslin, «Projective modules over a polynomial ring are free», *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, Vol. 229, 1976, p. 1063-1066 (traduction anglaise du russe : *Soviet. Math. Dokl.*, Vol. 17, 1976, p. 1160- 1164).

- [35] K. Yosida, «Operational Calculus» (traduction anglaise du japonais), Springer, New York, 1984.
- [36] D.C. Youla, G. Gnavi, «Notes on n -dimensional system theory», *IEEE Trans. Circuits Systems*, Vol. 26, 1979, p. 105-111.

Manuscrit reçu le 2 avril 1998.

LES AUTEURS

Michel FLIESS



Ancien élève de l'École polytechnique, Michel Fliess a soutenu sa thèse d'état de l'Université Paris-VII en 1972, sous la direction du professeur M.P. Schützenberger. Invité en 1973 aux Etats-Unis par le professeur R.E. Kalman, il s'est depuis lors consacré à l'automatique. Appelé en 1977 par le professeur B. Picinbono au laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S-Supélec, Gif-sur-Yvette), il y est resté jusqu'en 1998. Il est, aujourd'hui, au centre de

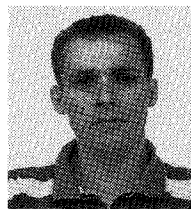
Mathématique et de Leurs Applications, à l'École normale supérieure de Cachan. Michel Fliess, qui est directeur-de-recherche au C.N.R.S, a obtenu en 1987 le prix Michel Montpetit de l'Académie des Sciences de Paris, et, en 1991 la médaille d'argent du C.N.R.S.

Nicolas PETIT



Nicolas Petit est diplômé de l'École Polytechnique, promotion X92. Il prépare actuellement un Doctorat à l'École des Mines de Paris au Centre Automatique et Systèmes. Son travail porte sur la commande des systèmes non linéaires et aux paramètres répartis et leurs applications industrielles.

Philippe MARTIN



Philippe Martin a obtenu le Doctorat «Mathématiques et Automatique» de l'École des Mines de Paris en 1992, où il est actuellement chargé de recherches. En 1993-1994 il a travaillé au Center of Control Engineering and Computation de l'Université de Californie de Santa Barbara et au Département de Mathématiques de l'Université de Caroline du Nord à Chappel Hill. Ses centres d'intérêt sont les aspects théoriques de la commande non-linéaire et leurs applications industrielles.

Pierre ROUCHON



Ancien élève de l'école Polytechnique, promotion X80, Pierre Rouchon a obtenu son doctorat en Génie des Procédés en 1990 à l'École des Mines de Paris. Il participe à l'enseignement de l'École Polytechnique comme maître de conférence en mathématiques appliquées. Ingénieur en Chef des Mines, il dirige actuellement le Centre Automatique et Systèmes de l'École des Mines de Paris. Ces thèmes de recherches portent sur la dynamique et la commande des systèmes.